ACTIVITÉ 2.3.3. MINIMISATION DES PERTES PAR EFFET JOULE

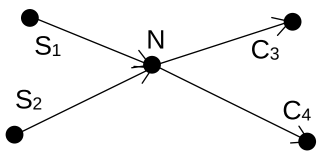
La circulation d'un courant électrique dans une branche résistive de circuit électrique s'accompagne d'une dissipation d'une partie de l'énergie électrique sous forme thermique. C'est l'effet Joule. La puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique de résistance r parcouru par un courant d'intensité I est égale à $\mathcal{P}_J = r \times I^2$.

Objectif de l'activité : déterminer comment réduire les pertes par effet Joule dans un réseau de distribution de l'électricité.

Vidéo : *Les réseaux électriques intelligents, c'est quoi ?*
par Visual 2 explain, https://youtu.be/9u79pxnYx4U

Doc. 1 Situation problème

Le réseau étudié est composé :
- d'une source S_1 délivrant un courant électrique d'intensité maximale égale à 100 A ;
- d'une source S_2 délivrant un courant électrique d'intensité maximale égale à 200 A ;
- d'un nœud N ;
- d'une cible C_3 alimentée par un courant d'intensité égale à 30 A et
- d'une cible C_4 alimentée par un courant d'intensité égale à 50 A.



L'arc S_1N est associé à une résistance de 0,6 Ω, tous les autres ont une résistance égale chacune à 1,0 Ω.

Doc. 2 Pertes par effet Joule

$\mathcal{P}_1 = r_1 \times I_1^2 = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2$.
$\mathcal{P}_2 = r_2 \times I_2^2 = 1{,}0\ \Omega \times I_2^2$.
$\mathcal{P}_3 = r_3 \times I_3^2 = 1{,}0\ \Omega \times (30\ \text{A})^2 = 900\ \text{W}$.
$\mathcal{P}_4 = r_4 \times I_4^2 = 1{,}0\ \Omega \times (50\ \text{A})^2 = 2\ 500\ \text{W}$.

Total : $\mathcal{P}_J = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + 1{,}0\ \Omega \times I_2^2 + 3\ 400\ \text{W}$.

D'après la loi des nœuds, $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 = 80$ A.
Donc $I_2 = 80\ \text{A} - I_1$.

<u>En remplaçant I_2 par cette dernière expression dans celle de la puissance totale dissipée par effet Joule,</u>

$$\mathcal{P}_J(I_1) = 1{,}6\ \Omega \times I_1^2 - 160\ \text{V} \times I_1 + 9\ 800\ \text{W}$$

Modèle mathématique par la fonction f :

$$f : [0;100] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 1{,}6 \cdot x^2 - 160 \cdot x + 9\ 800$$

1. Réaliser la démonstration mathématique associée au texte souligné du document 2.
2. Indiquer la grandeur physique modélisée mathématiquement par la lettre x, puis celle modélisée par $f(x)$.

L'objectif est de minimiser les pertes par effet Joule. Il s'agit donc de trouver la valeur de x pour laquelle l'image de x par la fonction f est la plus petite possible dans l'intervalle étudié.

Parcours 1 SPÉ MATHS

3. Indiquer à quelle grande catégorie de fonctions appartient la fonction f. Discuter de sa dérivabilité.

4. Étudier les variations de la fonction f.

5. Déterminer la valeur de l'intensité du courant électrique I_1 qui minimise les pertes par effet Joule dans le réseau. En déduire celle de I_2.

6. Déterminer la valeur minimale des pertes par effet Joules dans le réseau.

Parcours 2 NON SPÉ MATHS

3. Exploiter la calculatrice graphique ou un logiciel tableur-grapheur pour obtenir la représentation graphique de la fonction f dans son intervalle de définition. À défaut, construire sa représentation graphique sur une feuille de papier millimétré.

4. Étudier cette représentation et le tableau de valeurs pour estimer la valeur de x qui minimise son image par f.

5. En déduire les valeurs des intensités I_1 et I_2 pour lesquelles les pertes par effet Joule sont les plus petites possible.

6. Déterminer la valeur des pertes par effet Joule dans le réseau dans ces conditions.

Correction et bilan ACTIVITÉ 2.3.3. Minimisation des pertes par effet Joule

1. $\mathcal{P}_J = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + 1{,}0\ \Omega \times I_2^2 + 3\,400\ \mathrm{J} = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + 1{,}0\ \Omega \times (80\ A - I_1)^2 + 3\,400\ \mathrm{W}.$

Développons le carré :

$$\mathcal{P}_J = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + 1{,}0\ \Omega \times [(80\ A)^2 + I_1^2 - 2 \times 80\ A \times I_1] + 3\,400\ \mathrm{W}.$$

Distributions 1,0 Ω dans le crochet :

$$\mathcal{P}_J = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + (6\,400\ W + 1{,}0\ \Omega \times \mathrm{I}_1^2 - 160\ V \times I_1) + 3\,400\ \mathrm{W}.$$

Regroupons les termes ensemble :

$$\mathcal{P}_J = 0{,}6\ \Omega \times I_1^2 + 1{,}0\ \Omega \times \mathrm{I}_1^2 - 160\ V \times I_1 + 6\,400\ \mathrm{W} + 3\,400\ \mathrm{W}.$$

Sommons :

$$\mathcal{P}_J = 1{,}6\ \Omega \times I_1^2 - 160\ V \times I_1 + 9\,800\ \mathrm{W}.$$

2. La lettre *x* représente l'intensité I_1 du courant qui circule dans la branche S_1N ; *f*(*x*) représente la puissance dissipée par effet Joule globalement dans tout le réseau.

Parcours 1 :

3. La fonction *f* est un polynôme du second degré, elle est donc dérivable sur son intervalle de définition. Remarque : comme 1,6 > 0, la fonction est convexe.

4. Déterminons l'expression de la dérivée *f* ' de la fonction *f* :

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2 \times 1{,}6 \times x - 160 = 3{,}2 \cdot x - 160$. Fonction affine croissante dans l'intervalle.

Dressons le tableau de signe de *f* ' et le tableau de variation de *f*.

$$f'(x) > 0 \iff 3{,}2x - 160 > 0 \iff x > \frac{160}{3{,}2} = 50$$

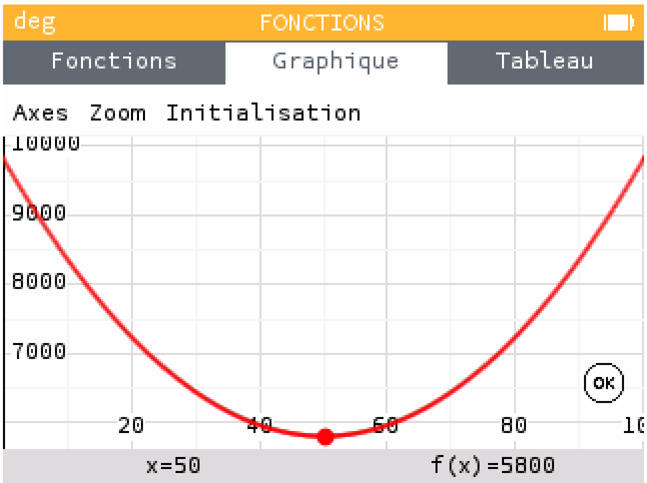
x	0	50	100
Signe de *f* '(x)	-	0	+
Variations de *f*	*f*(0) = 9 800 ↘	*f*(50) = 5 800	↗ *f*(100) = 9 800

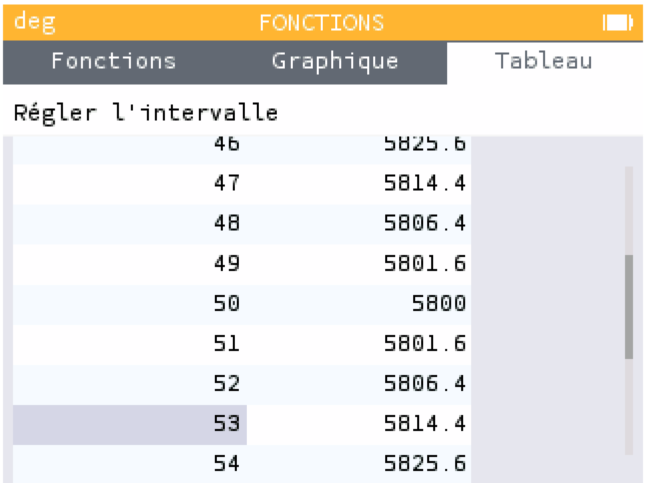
5. Pour obtenir le plus faible effet Joule, il faut choisir I_1 = 50 A et donc I_2 = 30 A.

6. Dans ces conditions, $\mathcal{P}_{J,min} = 5\,800\ W$.

Parcours 2 :

3.



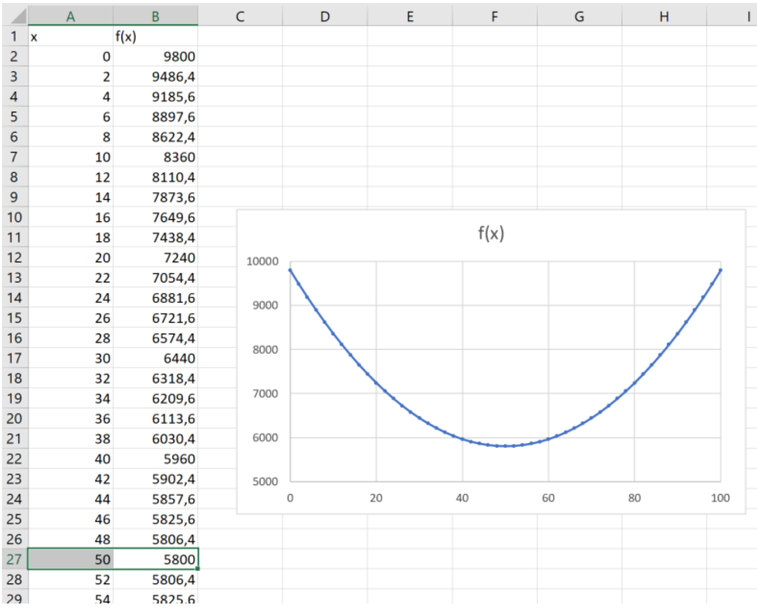


46	5825.6
47	5814.4
48	5806.4
49	5801.6
50	5800
51	5801.6
52	5806.4
53	5814.4
54	5825.6

4. La valeur de x associée au minimum est 50.

5. $I_1 = 50$ A et donc $I_2 = 30$ A.

6. Dans ces conditions, $\mathcal{P}_{J,min} = 5\,800\ W$.



x	f(x)
0	9800
2	9486,4
4	9185,6
6	8897,6
8	8622,4
10	8360
12	8110,4
14	7873,6
16	7649,6
18	7438,4
20	7240
22	7054,4
24	6881,6
26	6721,6
28	6574,4
30	6440
32	6318,4
34	6209,6
36	6113,6
38	6030,4
40	5960
42	5902,4
44	5857,6
46	5825,6
48	5806,4
50	5800
52	5806,4
54	5825,6

Bilan :

Un réseau de transport électrique peut être modélisé mathématiquement par un graphe orienté dont les arcs représentent les lignes électriques et dont les sommets représentent les sources distributrices, les nœuds intermédiaires et les cibles destinatrices.

Dans ce modèle, l'objectif est de minimiser les pertes par effet Joule sur l'ensemble du réseau sous les contraintes suivantes :
- l'intensité totale sortant d'une source est limitée par la puissance maximale distribuée ;
- l'intensité totale entrant dans chaque nœud intermédiaire est égale à l'intensité totale qui en sort ;
- l'intensité totale arrivant à chaque cible est imposée par la puissance qui y est utilisée.